EJERCICIOS ESTADÍSTICA. SOLUCIONES

TEMA 2 Y TEMA 3

Ejercicio 1.

El servicio de estudios de una empresa, que proyecta concurrir en un mercado donde sólo existiría otra empresa competidora, estima que, al finalizar el ejercicio económico, sus ventas superarán las 100.000 unidades con una probabilidad de:

—0,8, si el precio fijado por la empresa competidora para su artículo es «alto».
—0,5, si el precio fijado por la empresa competidora para su artículo es «medio».
—0,1, si el precio fijado por la empresa competidora para su artículo es «bajo».

Además, por situaciones anteriores, el servicio de estudios determina que la probabilidad de que la empresa competidora:

—Fije precio «alto», es de 0,3
—Fije precio «medio», es de 0,5.
—Fije precio «bajo», es de 0,2.

Determinar la probabilidad de que las ventas de la empresa superen las 100.000

Ejercicio 1. SOLUCIÓN

Resolución:

El suceso consistente en que las ventas superen 100.000 unidades, *cualquiera que sea el precio fijado para su artículo por la competencia*, lo representaremos por V, y es el suceso cuya probabilidad vamos a determinar.

Si representamos por θ_1, θ_2 y θ_3 a los sucesos consistentes en:

—Que la competencia fije precio «alto», por θ_1
—Que la competencia fije precio «medio», por θ_2
—Que la competencia fije precio «bajo», por θ_3

estas modalidades de los precios, son tales que,

a)

$$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 = \Omega$$

es decir, la competencia adoptará durante el ejercicio económico, para su artículo o el precio «alto», o el precio «medio», o el precio «bajo».

b)

Ejercicio 1. SOLUCIÓN

c)

$$\theta_i \cap V \neq \phi \qquad \forall i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

es decir, que el suceso V es compatible con cualquiera de las tres modalidades θ_1, θ_2, θ_3.

Por ello, la probabilidad del suceso V, vendrá dada por la expresión:

$$P(V) = P(V/\theta_1) \cdot P(\theta_1) + P(V/\theta_2) \cdot P(\theta_2) + P(V/\theta_3) \cdot P(\theta_3) \qquad (1)$$

Pasemos a determinar las probabilidades $P(\theta_i)$ y $P(V/\theta_i)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Determinación de las $P(\theta_i)$:

a) $P(\theta_1)$: es la probabilidad de que la empresa competidora fije precio «alto». Será:

$$P(\theta_1) = 0{,}3$$

b) $P(\theta_2)$: es la probabilidad de que la empresa competidora fije precio «medio». Será:

$$P(\theta_2) = 0{,}5$$

..., todas ellas, estimadas por el servicio de estudios.

Ejercicio 1. SOLUCIÓN

Determinación de la $P(V/\theta_i)$:

a) $P(V/\theta_1)$: es la probabilidad de que las ventas de la empresa superen las 100.000 unidades *sabiendo* que la empresa competidora fija precio «alto». Será:

$$P(V/\theta_1) = 0{,}8$$

b) $P(V/\theta_2)$: es la probabilidad de que las ventas de la empresa superen las 100.000 unidades, *sabiendo* que la empresa competidora fija precio «medio». Será:

$$P(V/\theta_2) = 0{,}5$$

c) $P(V/\theta_3)$: es la probabilidad de que las ventas de la empresa superen las 100.000 unidades, *sabiendo* que la empresa competidora fija precio «bajo». Será:

$$P(V/\theta_3) = 0{,}1$$

probabilidades, todas ellas, estimadas por el servicio de estudios.

Con ello, disponiendo los cálculos indicados por la expresión (1), en la forma:

$P(\theta_i)$	$P(V/\theta_i)$	$P(V/\theta_i) \cdot P(\theta_i)$
$P(\theta_1) = 0{,}3$	$P(V/\theta_1) = 0{,}8$	$P(V/\theta_1) \cdot P(\theta_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}8$
$P(\theta_2) = 0{,}5$	$P(V/\theta_2) = 0{,}5$	$P(V/\theta_2) \cdot P(\theta_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5$

Ejercicio 2

Una persona tiene dos negocios en funcionamiento, *A* y *B*. El primer negocio puede producir mayor beneficio, pero en el 25 % de los balances arroja pérdida, mientras que en el segundo, donde la perspectiva de beneficio es menor, arroja pérdida sólo en el 5 % de los casos. Se supone que el conjunto de operaciones es análogo en ambos negocios. Si, analizado el resultado económico de una de las operaciones, arrojase pérdida, ¿cuál sería la probabilidad de que dicha operación correspondiese al negocio *B*?

Ejercicio 2. SOLUCIÓN

Resolución:

Representemos a los sucesos:

—La operación corresponde al negocio A, por θ_A.
—La operación corresponde al negocio B, por θ_B.
—Resultado económico de una de las operaciones arroja pérdida, por C.

El suceso cuya probabilidad se pide, podrá, en consecuencia, representarse así:

$$\theta_B/C$$

esto es, será el suceso consistente en que la operación corresponda al negocio B, *sabiendo* que el resultado económico arroja pérdida.

Como quiera que $P(\theta_B)$ (probabilidad de que la operación corresponda al negocio B), es conocida, ya que según la información de que disponemos:

$$P(\theta_A) = P(\theta_B) = \frac{1}{2}$$

por ser el conjunto de las operaciones análogo en los dos negocios, se tendrá que $P(\theta_B/C)$ vendrá dada por:

de la operación arroja pérdida).

Pasemos, pues, a determinar: $P(C/\theta_A)$ y $P(C/\theta_B)$, puesto que $P(\theta_A)$ y $P(\theta_B)$ están determinadas ya.

Ejercicio 2. SOLUCIÓN

Determinación de $P(C/\theta_A)$ y $P(C/\theta_B)$:

a) $P(C/\theta_A)$: es la probabilidad de que la operación arroje pérdida, *sabiendo* que corresponde al negocio *A*. Será:

$$P(C/\theta_A) = 0{,}25$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 25 % de las operaciones del negocio *A* arrojan pérdida.

b) $P(C/\theta_B)$: es la probabilidad de que la operación arroje pérdida, *sabiendo* que corresponde al negocio *B*. Será:

$$P(C/\theta_B) = 0{,}05$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 5 % de las operaciones del negocio *B* arrojan pérdida.

Con ello, disponiendo los cálculos que indica la expresión (1) en la forma:

$P(\theta_A) = \frac{1}{2}$	$P(C/\theta_A) = 0{,}25$	$P(C/\theta_A) \cdot P(\theta_A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}25$

se tiene que:

Ejercicio 3.

El volumen de producción diario en tres plantas diferentes de una fábrica, es de 500 unidades en la primera, 1.000 en la segunda, y 2.000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas, producidas, en las tres plantas es del 1 %, 0,8 %, y 2 %, respectivamente, determinar la probabilidad de que:

1) Extraída una unidad, al azar, resulte *no* defectuosa.

2) Habiendo sido extraída una unidad defectuosa, haya sido producida en la primera planta.

Ejercicio 3. SOLUCIÓN

Resolución:

1) Se trata de determinar la probabilidad de un suceso que representaremos por $\bar{D}$ (unidad extraída *no* defectuosa, cualquiera que sea la planta en que haya sido producida), suceso que puede acaecer con diversas modalidades que representaremos por θ_1, θ_2, θ_3 (θ_i representa que una unidad extraída haya sido producida en la planta i).

Como quiera que las modalidades: θ_1, θ_2, θ_3 son tales que:

a)

$$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 = \Omega$$

es decir, la unidad extraída, al azar, ha de haberse producido en la primera, o en la segunda o en la tercera planta.

b)

Ejercicio 3. SOLUCIÓN

c)

$$\bar{D} \cap \theta_i \neq \phi \qquad \forall i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

es decir, la unidad no defectuosa extraída, ha podido ser producida en cualquiera de las tres plantas.

se tendrá que la probabilidad del suceso $\bar{D}$, vendrá dada por:

$$P(\bar{D}) = P(\bar{D}/\theta_1) \cdot P(\theta_1) + P(\bar{D}/\theta_2) \cdot P(\theta_2) + P(\bar{D}/\theta_3) \cdot P(\theta_3) \qquad (1)$$

Pasemos, entonces, a determinar las $P(\theta_i)$, $(\forall i = 1, 2, 3)$, y $P(\bar{D}/\theta_i)$, $(\forall i = 1, 2, 3)$.

Determinación de las $P(\theta_i)$:

a) $P(\theta_1)$: es la probabilidad de que la unidad extraída haya sido producida en la primera planta. Será:

$$P(\theta_1) = \frac{500}{500 + 1.000 + 2.000} = \frac{500}{3.500} = \frac{1}{7}$$

puesto que, según la información de que disponemos, son 500 unidades las producidas en la primera planta, del total de las 3.500 unidades producidas.

b) $P(\theta_2)$: es la probabilidad de que la unidad extraída haya sido producida en la segunda planta. Será:

cidas en la segunda planta, del total de las 3.500 unidades producidas.

Ejercicio 3. SOLUCIÓN

c) $P(\theta_3)$: es la probabilidad de que una unidad extraída haya sido producida en la tercera planta. Será:

$$P(\theta_3) = \frac{2.000}{500 + 1.000 + 2.000} = \frac{4}{7}$$

puesto que, según la información de que disponemos, son 2.000 las unidades producidas en la tercera planta, del total de las 3.500 unidades producidas.

Determinación de las $P(\bar{D}/\theta_i)$:

a) $P(\bar{D}/\theta_1)$: es la probabilidad de que una unidad extraída sea no defectuosa, *sabiendo* que ha sido producida en la primera planta. Será:

$$P(\bar{D}/\theta_1) = 1 - P(D/\theta_1)$$

según sabemos por el problema 6 (representando por D el suceso consistente en extraer una unidad defectuosa), y al ser

$$P(D/\theta_1) = 0{,}01$$

Ejercicio 3. SOLUCIÓN

b) $P(\bar{D}/\theta_2)$: es la probabilidad de que una unidad extraída sea no defectuosa, *sabiendo* que ha sido producida en la segunda planta. Será:

$$P(\bar{D}/\theta_2) = 1 - P(D/\theta_2)$$

según sabemos por el problema 6, y al ser:

$$P(D/\theta_2) = 0{,}008$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 0,8 % de las unidades producidas «*en la segunda planta*» son defectuosas, la probabilidad $P(\bar{D}/\theta_2)$ será:

$$P(\bar{D}/\theta_2) = 0{,}992 = \frac{992}{1.000}$$

c) $P(\bar{D}/\theta_3)$: es la probabilidad de que una unidad extraída sea no defectuosa, *sabiendo* que ha sido producida en la tercera planta. Será:

$$P(\bar{D}/\theta_3) = 1 - P(D/\theta_3)$$

según sabemos por el problema 6, y al ser:

$$P(D/\theta_3) = 0{,}02$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 2 % de las unidades pro-

$$P(\bar{D}) = 0{,}99 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}992 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}98 \cdot \frac{4}{7} = 0{,}98485$$

Ejercicio 3. SOLUCIÓN

2) Se trata de determinar la probabilidad del suceso que representaremos por θ_1/D (que la unidad extraída haya sido producida en la primera planta, *sabiendo* que dicha unidad es defectuosa).

Como quiera que la probabilidad de que la unidad extraída haya sido producida en la primera planta, $P(\theta_1)$, es conocida, todo el problema, ahora, estriba en hacer *uso de la información* que proporciona el hecho de que la unidad extraída es defectuosa, para *rectificar* $P(\theta_1)$. La *forma* en que esta probabilidad es rectificada sabemos que viene dada por la expresión:

$$P(\theta_1/D) = \frac{P(D/\theta_1)\cdot P(\theta_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(D/\theta_i)\cdot P(\theta_i)} \qquad (2)$$

Puesto que las probabilidades que figuran en el cociente del segundo miembro de (2) son conocidas (por haberse determinado en el apartado 1) de este problema), pasamos, ya, a determinar $P(\theta_1/D)$. Se tendrá, disponiendo los cálculos que indica la expresión (2) en la forma:

$P(\theta_i)$	$P(D/\theta_i)$	$P(D/\theta_i)\cdot P(\theta_i)$
$P(\theta_1) = \frac{1}{7}$	$P(D/\theta_1) = \frac{1}{100}$	$\boxed{P(D/\theta_1)\cdot P(\theta_1) = \frac{1}{700}}$
		$\sum P(D/\theta_i)\cdot P(\theta_i) = \frac{10,0}{700}$

que la probabilidad $P(\theta_1/D)$ es:

1

que es la probabilidad pedida, probabilidad rectificada del suceso θ_1 con base en la información proporcionada por el acaecimiento del suceso D.

Ejercicio 4.

Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas periféricas de una gran ciudad, de suerte que: el 60 % de los autobuses cubren el servicio de la primera línea, el 30 % cubren el servicio de la segunda línea y el 10 % cubren el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es:

—Del 2 % en la primera línea.
—Del 4 % en la segunda línea.
—Del 1 % en la tercera línea.

Determinar:

1) La probabilidad de que, en un día, un autobús sufra avería.
2) Sabiendo que un autobús ha sufrido una avería en un día determinado.

Ejercicio 4. SOLUCIÓN

Resolución:

1) Representemos por A (suceso consistente en que un autobús sufra avería en un día, cualquiera que sea la línea en la que presta el servicio) al suceso cuya probabilidad $P(A)$ hay que determinar. Es claro que dicho suceso puede acaecer con tres modalidades diferentes que representaremos por θ_1, θ_2, θ_3 (representando θ_i el hecho de que un autobús preste el servicio en la línea i).

Como quiera que las modalidades θ_1, θ_2, θ_3, son tales que:

a)

$$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 = \Omega$$

es decir, un autobús debe prestar servicio en cualquiera de las tres líneas

b)

Ejercicio 4. SOLUCIÓN

c)

$$A \cap \theta_i \neq \phi \quad \forall i \quad (i = 1, 2, 3)$$

es decir, el autobús que sufra avería, puede estar prestando servicio en cualquiera de las tres líneas.
se tendrá que la probabilidad del suceso A, vendrá dada por:

$$P(A) = P(A/\theta_1) \cdot P(\theta_1) + P(A/\theta_2) \cdot P(\theta_2) + P(A/\theta_3) \cdot P(\theta_3) \qquad (1)$$

Pasemos, ahora, a determinar las $P(\theta_i)$, y $P(A/\theta_i)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Determinación de las $P(\theta_i)$:

a) $P(\theta_1)$: es la probabilidad de que un autobús preste el servicio en la primera línea. Será:

$$P(\theta_1) = 0{,}6$$

puesto que según la información de que disponemos, el 60 % de los autobuses de la compañía prestan el servicio en la línea primera.

b) $P(\theta_2)$: es la probabilidad de que un autobús preste el servicio

... restan el servicio en la segunda línea.

Ejercicio 4. SOLUCIÓN

c) $P(\theta_3)$: es la probabilidad de que un autobús preste el servicio en la tercera línea. Será:

$$P(\theta_3) = 0{,}1$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 10 % de los autobuses de la compañía prestan el servicio en la tercera línea.

Determinación de las $P(A/\theta_i)$:

a) $P(A/\theta_1)$: es la probabilidad de que un autobús sufra avería en un día, *sabiendo* que presta el servicio en la primera línea. Será:

$$P(A/\theta_1) = 0{,}02$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 2 % de los autobuses *de la primera línea* sufren avería por día.

la segunda línea sufren avería por día.

Ejercicio 4. SOLUCIÓN

c) $P(A/\theta_3)$: es la probabilidad de que un autobús sufra avería en un día, *sabiendo* que presta el servicio en la tercera línea. Será:

$$P(A/\theta_3) = 0{,}01$$

puesto que, según la información de que disponemos, el 1 % de los autobuses *de la tercera línea* sufren avería por día.

Con ello, la probabilidad del suceso A, teniendo en cuenta (1), será:

$$\boxed{P(A) = (0{,}02) \cdot (0{,}6) + (0{,}04) \cdot (0{,}3) + (0{,}01) \cdot (0{,}1) = 0{,}025}$$

2) Vamos a determinar ahora la probabilidad del suceso que representaremos por θ_1/A (que el autobús preste el servicio en la primera línea, *sabiendo* que dicho autobús ha sufrido avería).

Como quiera que la probabilidad de que un autobús preste el servicio en la primera línea $P(\theta_1)$, es conocida, todo el problema estriba en *hacer uso de la información* que proporciona el hecho de que el autobús en cuestión ha sufrido avería, para *rectificar* $P(\theta_1)$. La *forma* en que esta probabilidad es rectificada sabemos que viene dada por la expresión:

Ejercicio 4. SOLUCIÓN

Puesto que las probabilidades que figuran en el cociente del segundo miembro de (2) son conocidas (por haberse determinado en el apartado 1) de este problema), pasamos, ya, a determinar $P(\theta_1/A)$. Se tendrá, disponiendo los cálculos que indica la expresión (2) en la forma:

$P(\theta_i)$	$P(A/\theta_i)$	$P(A/\theta_i) \cdot P(\theta_i)$
$P(\theta_1) = 0{,}6$	$P(A/\theta_1) = \frac{2}{100} = 0{,}02$	$\boxed{P(A/\theta_1) \cdot P(\theta_1) = 0{,}012}$
$P(\theta_2) = 0{,}3$	$P(A/\theta_2) = \frac{4}{100} = 0{,}04$	$P(A/\theta_2) \cdot P(\theta_2) = 0{,}012$
$P(\theta_3) = 0{,}1$	$P(A/\theta_3) = \frac{1}{100} = 0{,}01$	$P(A/\theta_3) \cdot P(\theta_3) = 0{,}001$
		$\sum_{i=1}^{3} P(A/\theta_i) \cdot P(\theta_i) = 0{,}025$

que la probabilidad, $P(\theta_1/A)$, es:

...proporcionada por el acaecimiento del suceso A.

Ejercicio 5.

Dada la variante ξ, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de cuantía $P(\xi = r)$:

$$P(\xi = x) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x!(4-x)!} \qquad \text{para} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(\xi = x) = 0 \qquad \text{para cualquier otro valor de } x$$

determinar:

1) La función de distribución de la variante ξ.
2) Las probabilidades:

$$P(\xi = 3) \qquad P(1 < \xi < 2.5) \qquad P(\xi < 2.5)$$

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

Resolución:

1) Por definición, sabemos que la función de distribución $F(x)$ es:

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

y al ser, en este caso, la distribución de probabilidad, de la variante ξ, de tipo discreto, la función de distribución toma la forma:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i)$$

esto es, para su *determinación* procederemos a «sumar» las probabilidades concentradas en los puntos x_i que estén a la izquierda del punto x y la probabilidad

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

Ahora bien, la distribución de probabilidad de la variante ξ, que define la función de cuantía $P(\xi = x)$, es:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	$\frac{3}{48}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{48}$

puesto que:

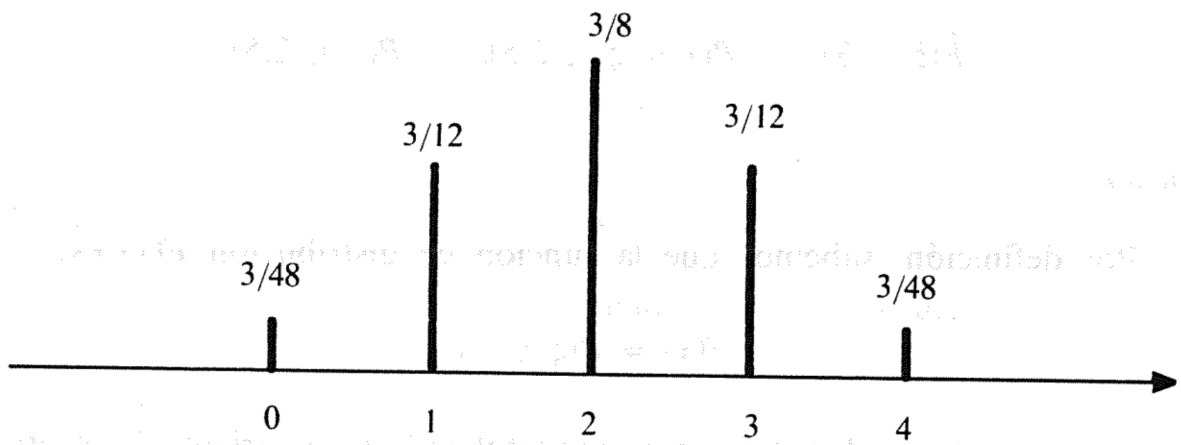
$$P(\xi = 0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0!(4-0)!} = \frac{3}{48}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1!(4-1)!} = \frac{3}{12}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!(4-2)!} = \frac{3}{8}$$

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

siendo la representación gráfica de dicha distribución de probabilidad:



Pasemos, ya, a determinar la función de distribución $F(x)$:

$a)$ $\forall x$, tal que, $x < 0$:

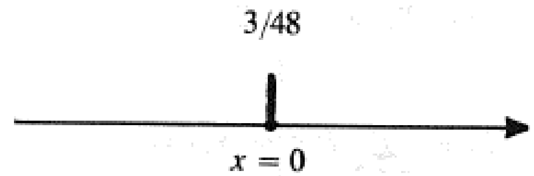
3/48

es cero.

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

b) Para $x = 0$:

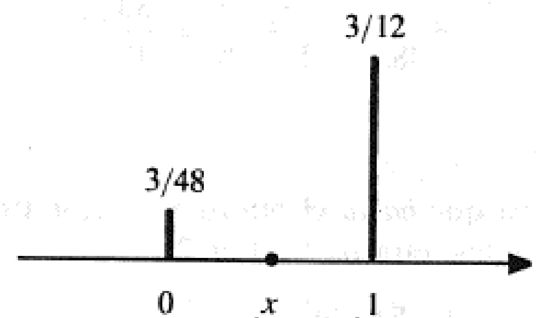
$$F(0) = \sum_{x_i \leq 0} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) = \frac{3}{48}$$



puesto que *hasta* el punto $x = 0$, la única probabilidad existente es, precisamente, la que corresponde a dicho punto.

c) $\forall x$, tal que, $0 < x < 1$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) = \frac{3}{48}$$



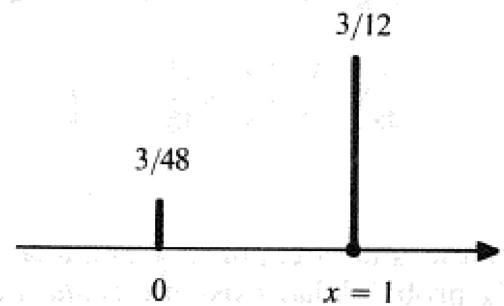
Ejercicio 5. SOLUCIÓN

d) Para $x = 1$:

$$F(1) = \sum_{x_i \leq 1} P(\xi = x_i) =$$

$$= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$$

$$= \frac{3}{48} + \frac{3}{12} = \frac{15}{48}$$

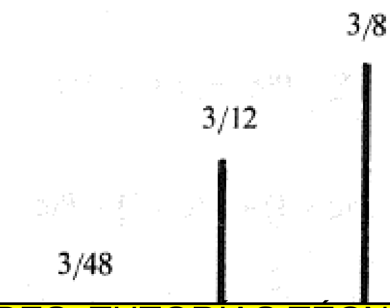


ya que, *hasta* el punto $x = 1$, la probabilidad existente es la que corresponde, sólo, a los puntos 0 y 1.

e) $\forall x$, tal que, $1 < x < 2$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) =$$

$$= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$$



... probabilidad existente *hasta* dicho punto x, es la que corresponde, sólo, a los puntos 0 y 1.

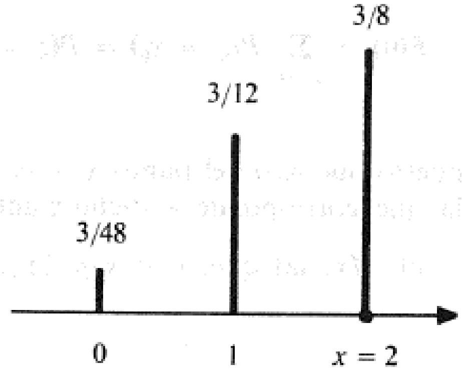
Ejercicio 5. SOLUCIÓN

f) Para $x = 2$:

$$F(2) = \sum_{x_i \leq 2} P(\xi = x_i) =$$

$$= P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2) =$$

$$= \frac{3}{48} + \frac{3}{12} + \frac{3}{8} = \frac{33}{48}$$



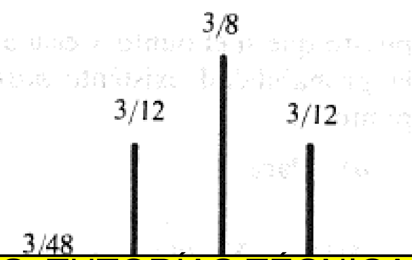
ya que *hasta* el punto $x = 2$, la probabilidad existente es la que corresponde, sólo, a los puntos 0, 1 y 2.

g) $\forall x$, tal que, $2 < x < 3$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq 4} P(\xi = x_i) =$$

$$= P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2) =$$

3 3 3 33



... probabilidad existente *hasta* dicho punto x, es la que corresponde, sólo, a los puntos 0, 1 y 2.

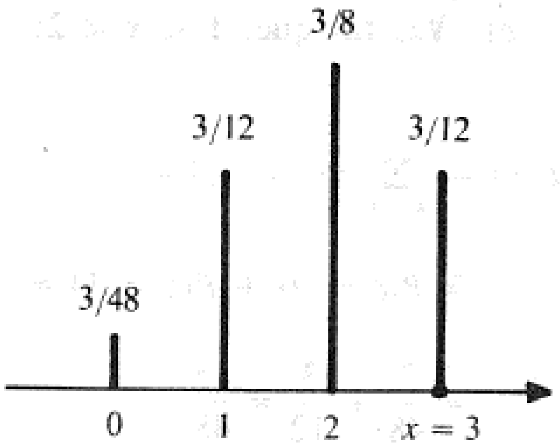
Ejercicio 5. SOLUCIÓN

h) Para $x = 3$:

$$F(3) = \sum_{x_i \le 3} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) +$$

$$+P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=$$

$$=\frac{3}{48}+\frac{3}{12}+\frac{3}{8}+\frac{3}{12}=\frac{45}{48}$$



ya que *hasta* el punto $x = 3$, la probabili...

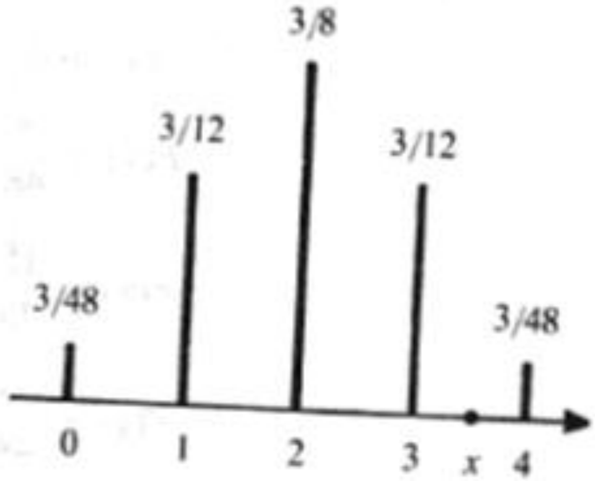
Ejercicio 5. SOLUCIÓN

i) $\forall x$, tal que, $3 < x < 4$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) +$$

$$+ P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$

$$= \frac{3}{48} + \frac{3}{12} + \frac{3}{8} + \frac{3}{12} = \frac{45}{48}$$



puesto que si el punto x está a la derecha del punto 3 y a la izquierda del punto 4, la probabilidad *hasta* dicho punto x, es la que corresponde sólo a los ...
0, 1, 2, 3

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

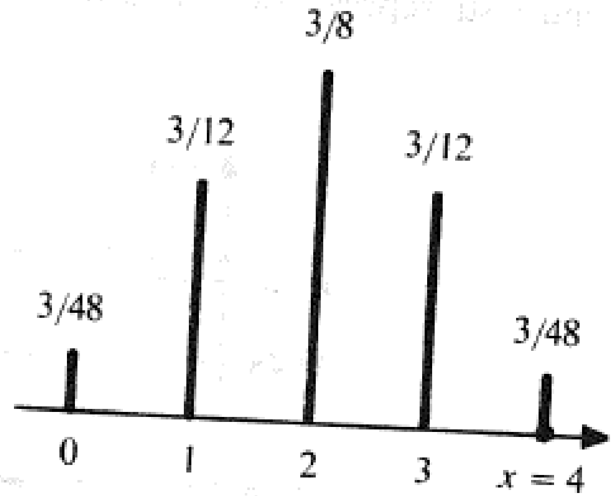
j) **Para** $x = 4$:

$$F(4) = \sum_{x_i \leq 4} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) +$$

$$+ P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) +$$

$$+ P(\xi = 4) = \frac{3}{48} + \frac{3}{12} + \frac{3}{8} + \frac{3}{12} +$$

$$+ \frac{3}{48} = 1$$

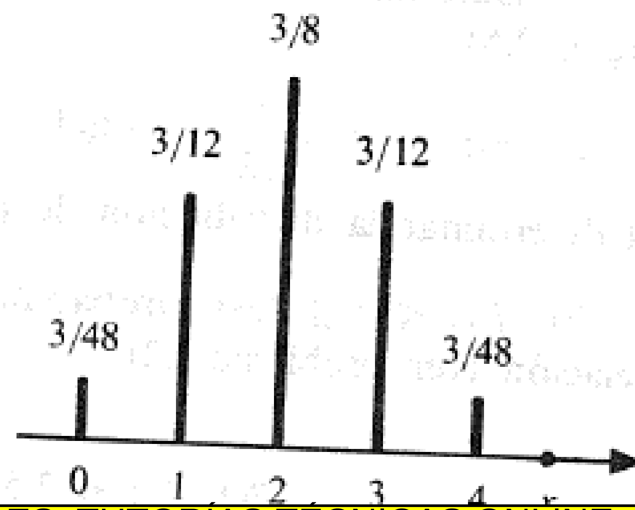


ya que *hasta* el punto

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

$k)$ $\forall x$, tal que, $4 < x$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{3}{48} + \frac{3}{12} + \frac{3}{8} + \frac{3}{12} + \frac{3}{48} = 1$$



Ejercicio 5. SOLUCIÓN

puesto que si el punto x está a la derecha del punto 4, la probabilidad existente *hasta* dicho punto x, es la que corresponde, sólo, a los puntos 0, 1, 2, 3 y 4.

Por tanto, la función de distribución $F(x)$, de la variante ξ, vendrá definida así:

$$F(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

$$F(x) = \frac{3}{48} \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 1$$

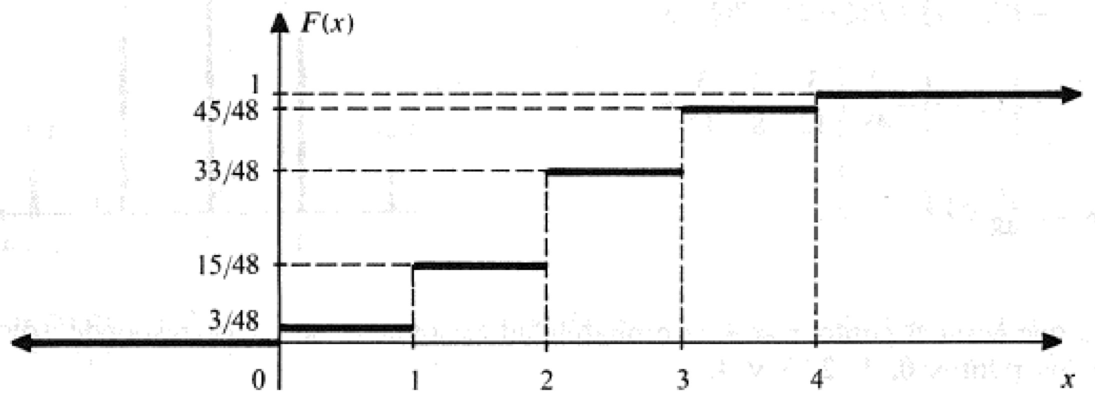
$$F(x) = \frac{15}{48} \quad \text{para} \quad 1 \leq x < 2$$

$$F(x) = \frac{33}{48} \quad \text{para} \quad 2 \leq x < 3$$

$$F(x) = \frac{45}{48} \quad \text{para} \quad 3 \leq x < 4$$

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

siendo su representación gráfica:



2) Determinaremos, ahora, las probabilidades $P(\xi = 3)$, $P(1 \leq \xi \leq 2{,}5)$, $P(\xi \leq 2{,}5)$:

a) $P(\xi = 3) = \frac{3}{12}$: resultado que fue establecido por la función de cuantía al determinar la distribución de probabilidad de la variante ξ.

Ejercicio 5. SOLUCIÓN

y al ser:

$$F(2{,}5) = \frac{33}{48} \quad \text{puesto que} \quad 2{,}5 \in [2,\, 3)$$

$$F(1) = \frac{15}{48} \quad \text{puesto que} \quad 1 \in [1,\, 2)$$

$$P(\xi = 1) = \frac{3}{12}$$

probabilidad establecida por la función de cuantía, al determinar la distribución de probabilidad de la variante ξ

se tendrá:

$$P(1 \leq \xi \leq 2{,}5) = \frac{33}{48} - \frac{15}{48} + \frac{3}{12} = \frac{30}{48}$$

c) $P(\xi \leq 2{,}5)$: probabilidad que determinaremos teniendo en cuenta que, por definición:

$$P(\xi \leq 2{,}5) = F(2{,}5)$$

con lo que, al ser:

$$F(2{,}5) = \frac{33}{48}$$

Ejercicio 6.

Dada la variante ξ, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad:

$$f(x) = 0 \qquad \text{para} \qquad x \leq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{9}(x+1) \qquad \text{para} \qquad 0 < x \leq 1$$

$$f(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{para} \qquad 1 < x \leq \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right) \qquad \text{para} \qquad \frac{3}{2} < x \leq 2$$

$$f(x) = \frac{1}{9}(4-x) \qquad \text{para} \qquad 2 < x \leq 3$$

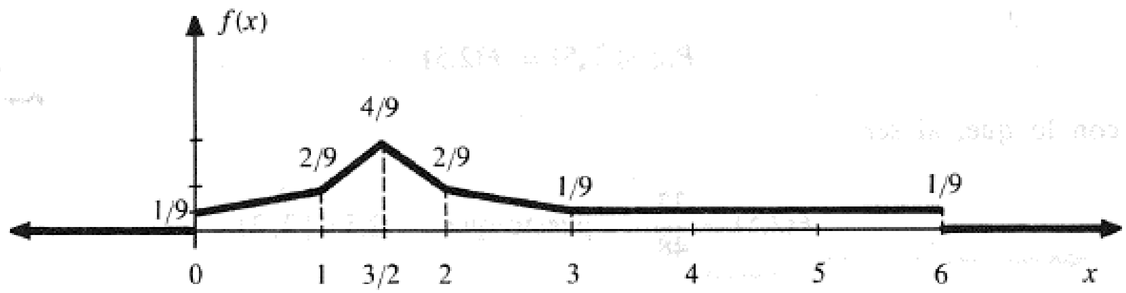
$$f(x) = \frac{1}{9} \qquad \text{para} \qquad 3 < x \leq 6$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para} \qquad 6 < x$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

Resolución:

1) La representación gráfica de la función de densidad será la siguiente:



2) Pasemos a determinar la función de distribución $F(x)$; por definición sabemos que:

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

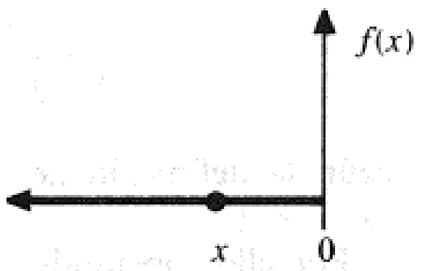
y al ser, en este caso, la distribución de la variante ξ de tipo continuo, la función

esto es, para su determinación, procederemos a integrar la correspondiente función de densidad

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

a) $\forall x$, tal que, $x < 0$, se tiene:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$ si $x < 0$, la función de densidad $f(x)$ viene definida por expresión algebraica única:

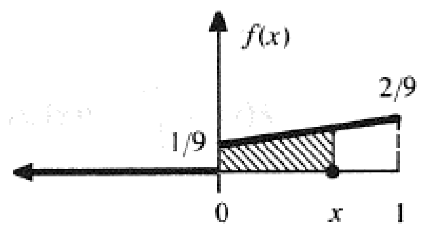
$$f(x) = 0$$

Luego:

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

b) $\forall x$, tal que, $0 < x \leq 1$, se tiene:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$, si $0 < x \leq 1$, la función de densidad $f(x)$ *no* viene definida por expresión algebraica única, sino que:

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{9}(x + 1)$ para los puntos del intervalo $(0, x]$, si $0 < x \leq 1$

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos subintervalos parciales como expresiones algebraicas distintas definen a la función

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}(x+1)\,dx$$

según la definición de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0]$ y en el intervalo $(0, x]$, si $0 < x \leq 1$.

Por ello, operando, se tiene:

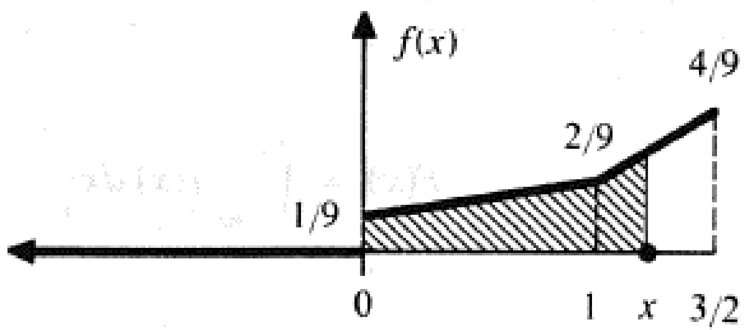
$$F(x) = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^x = \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]$$

Luego, para cualquier x tal que, $0 < x \leq 1$:

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

$c)$ $\forall x$, tal que, $1 < x \leq \frac{3}{2}$, se tiene:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$, si $1 < x \leq \frac{3}{2}$, la función de densidad

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

$f(x)$ *no* viene definida por expresión algebraica única, sino que:

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{9}(x+1)$ para los puntos del intervalo $(0, 1]$

$f(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ para los puntos del intervalo $(0, x]$ si $1 < x \leq \frac{3}{2}$

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos subintervalos como expresiones algebraicas distintas definan a la función de densidad. De esta forma:

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{9}(x+1)\,dx + \int_{1}^{x} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

según la definición de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0]$, en el intervalo $(0, 1]$ y en el intervalo $[1, x]$, si $1 < x \leq \frac{3}{2}$.

Por ello, operando, se tiene:

$$F(x) = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^x =$$

$$= 0 + \frac{3}{18} + \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) + \frac{3}{18}$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos subintervalos parciales como ecuaciones distintas definan a la función de densidad. De esta forma:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^{x} f(x)\,dx$$

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{9}(x+1)\,dx + \int_{1}^{3/2} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{3/2}^{x} \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right) dx$$

según la definición de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0]$, en el intervalo $(0, 1]$, en el

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

Por ello, operando, se tiene:

$$F(x) = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^{3/2} + \frac{4}{9}\left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^{x} =$$

$$= 0 + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{8} - \frac{21}{8}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{8}\right) - \frac{15}{18}$$

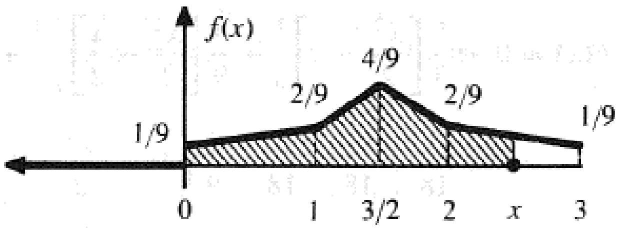
Luego, para cualquier x tal que, $\frac{3}{2} < x \leq 2$:

$$\boxed{F(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{8}\right) - \frac{15}{18}}$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

e) $\forall x$, tal que, $2 < x \leq 3$, se tiene:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$, si $2 < x \leq 3$, la función de densidad *no* viene definida por expresión algebraica única, sino que:

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{9}(x + 1)$ para los puntos del intervalo $(0, 1]$

$f(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ para los puntos del intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos

subintervalos parciales como expresiones algebraicas distintas definan a la función de densidad. De esta forma:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{x} f(x)\,dx$$

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{9}(x+1)\,dx + \int_{1}^{3/2} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx +$$

$$+ \int_{3/2}^{2} \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right) dx + \int_{2}^{x} \frac{1}{9}(4 - x)\,dx$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

Por ello, operando, se tiene:

$$F(x) = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^{3/2} + \frac{4}{9}\left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^2 + \frac{1}{9}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^x =$$

$$= 0 + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{9}\left(4x - \frac{x^2}{2} - 6\right) = \frac{1}{9}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{18}$$

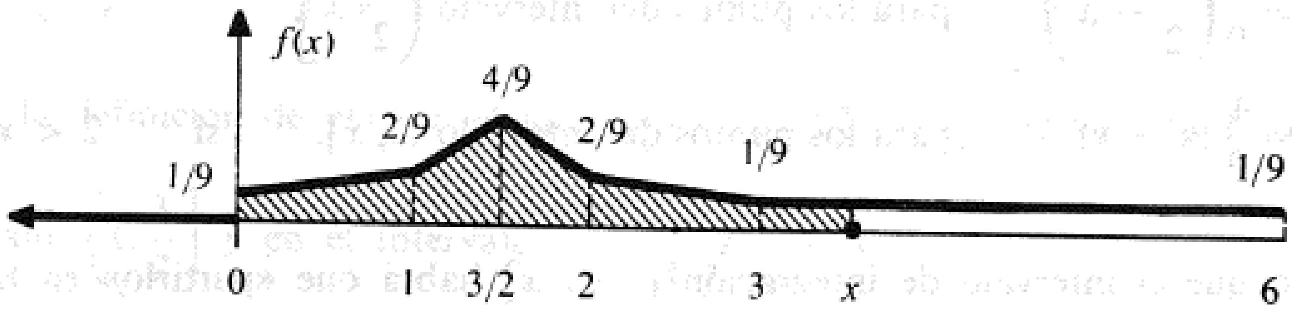
Luego, para cualquier x tal que, $2 < x \leq 3$:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{9}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{18}}$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

f) $\forall x$, tal que, $3 < x \leq 6$, se tiene que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



Ejercicio 6. SOLUCIÓN

y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$, si $3 < x \leq 6$, la función de densidad *no* viene definida por expresión algebraica única, sino que:

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{9}(x + 1)$ para los puntos del intervalo $(0, 1]$

$f(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ para los puntos del intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

$f(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right)$ para los puntos del intervalo $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$

$f(x) = \frac{1}{9}(4 - x)$ para los puntos del intervalo $(2, 3]$

$f(x) = \frac{1}{\ldots}$ para los puntos del intervalo $(3, x]$ si ...

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos subintervalos parciales como expresiones algebraicas distintas definan a la función de densidad. De esta forma:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx + $$
$$+ \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{x} f(x)\,dx$$

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{9}(x+1)\,dx + \int_{1}^{3/2} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx +$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

según la definición de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0]$, en el intervalo $(0, 1]$, en el intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right]$, en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$, en el intervalo $(2, 3]$ y en el intervalo $(3, x]$, si $3 < x \leq 6$.

Por ello, operando, se tiene:

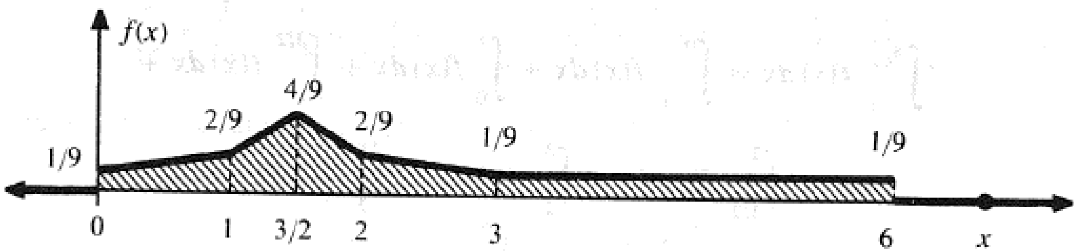
$$F(x) = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^{3/2} + \frac{4}{9}\left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^2 + \frac{1}{9}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \frac{1}{9}[x]_3^x = 0 + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{9}(x-3) = \frac{1}{9}(x-3) + \frac{12}{18}$$

Luego, para cualquier ...

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

g) $\forall x$, tal que $6 < x$, se tiene:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$



y en el intervalo de integración $(-\infty, x]$, si $6 < x$, la función de densidad *no* viene definida por expresión algebraica única, sino que:

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{1}{9}(x + 1)$ para los puntos del intervalo $(0, 1]$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

$f(x) = \frac{1}{9}$ para los puntos del intervalo $(3, 6]$

$f(x) = 0$ para los puntos del intervalo $(6, x]$, si $6 < x$

por lo que el intervalo de integración $(-\infty, x]$ habrá que «partirlo» en tantos subintervalos parciales como expresiones algebraicas distintas definan a la función de densidad. De esta forma:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx +$$

$$+ \int^{3} f(x)\,dx + \int^{6} f(x)\,dx + \int^{x} f(x)\,dx$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

por la conocida propiedad aditiva del intervalo de integración, resultando:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{9}(x+1)\,dx + \int_{1}^{3/2} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{3/2}^{2} \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right) dx +$$

$$+ \int_{2}^{3} \frac{1}{9}(4-x)\,dx + \int_{3}^{6} \frac{1}{9}\,dx + \int_{6}^{x} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^{3/2} + \frac{4}{9}\left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^{2} +$$

$$+ \frac{1}{9}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \frac{1}{9}[x]_3^6 + 0 =$$

$$= 0 + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{18} + \frac{3}{9} + 0 = 1$$

Luego, para cualquier x tal que, $6 < x$:

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

De los resultados anteriores, se sigue que la función de distribución viene definida así:

$$F(x) = 0 \qquad \text{para} \qquad x \leq 0$$

$$F(x) = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \qquad \text{para} \qquad 0 < x \leq 1$$

$$F(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) + \frac{3}{18} \qquad \text{para} \qquad 1 < x \leq \frac{3}{2}$$

$$F(x) = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{8}\right) - \frac{15}{18} \qquad \text{para} \qquad \frac{3}{2} < x \leq 2$$

$$F(x) = \frac{1}{9}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{18} \qquad \text{para} \qquad 2 < x \leq 3$$

Ejercicio 6. SOLUCIÓN

3) Para determinar la probabilidad:

$$P(1{,}3 < \xi < 2{,}4)$$

usaremos de la definición de la función de distribución de la variante ξ, obtenida en el apartado 2) de este problema, puesto que:

$$P(1{,}3 < \xi < 2{,}4) = P(1{,}3 < \xi \le 2{,}4) = F(2{,}4) - F(1{,}3)$$

ya que la distribución de probabilidad de la variante ξ es de tipo continuo, y en este tipo de distribuciones se verifica que:

$$P(1{,}3 < \xi < 2{,}4) = P(1{,}3 < \xi \le 2{,}4)$$

según vimos en el problema 24. Entonces, como:

$$F(2{,}4) = \frac{1}{9}\left(4(2{,}4) - \frac{(2{,}4)^2}{2}\right) - \frac{3}{18} = 0{,}58 \qquad \text{al ser} \qquad 2{,}4 \in (2,\, 3]$$

$$F(1{,}3) = \frac{4}{9}\left(\frac{(1{,}3)^2}{2} - \frac{1{,}3}{2}\right) + \frac{3}{18} = 0{,}25 \qquad \text{al ser} \qquad 1{,}3 \in \left(1,\, \frac{3}{2}\right]$$

que es la probabilidad pedida.